Anton NEGRILĂ
Maria NEGRILĂ

Soluțiile testelor de autoevaluare pot fi consultate la adresa:
https://www.edituraparalela45.ro/download/solutii_teste_de_autoevaluare_consolidare_clasa7_p1_2018-2019.pdf

algebră
geometrie

clasa a VII-a

partea I

ediția a VII-a

mate 2000 – consolidare

ÎNVĂȚARE DE CONSOLIDARE®

antrenament

Cuprins

RECAPITULARE ŞI EVALUARE INIȚIALĂ

Teste cu exerciții şi probleme recapitulative pentru pregătirea testării inițiale 5

ALGEBRĂ

Capitolul I. Numere raționale

1. Mulțimea numerelor raționale ($\mathbb{Q}$). Reprezentarea pe axă a numerelor raționale, opusul unui număr rațional. Incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ 14
2. Valoarea absolută a unui număr rațional (modulul). Ordonarea numerelor raționale 18

Recapitulare şi sistematizare prin teste 21

Test de autoevaluare 23

3. Adunarea numerelor raționale. Proprietăți 25
4. Scăderea numerelor raționale 29
5. Înmulțirea numerelor raționale. Proprietăți 32
6. Împărțirea numerelor raționale. Proprietăți 35
7. Puterea unui număr rațional cu exponent număr întreg. Calcul cu puteri 39
8. Ordinea efectuării operațiilor şi folosirea parantezelor 43

Test de autoevaluare 45

9. Ecuații de forma $ax + b = 0$; $a, b \in \mathbb{Q}$; $a \neq 0$ 47

Test de autoevaluare 53

10. Probleme care pot fi rezolvate cu ajutorul ecuațiilor 55
11. Media aritmetică şi media aritmetică ponderată 59
12. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană 61

Recapitulare şi sistematizare prin teste 62

Capitolul II. Numere reale

Rădăcina pătrată 65

1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect 65

Test de autoevaluare 69

2. Rădăcina pătrată a unui număr rațional nenegativ 71

Test de autoevaluare 77

Mulțimea numerelor reale 79

1. Modulul unui număr real. Reprezentarea pe axă a numerelor reale. Aproximări şi rotunjiri. Ordonări 79

Recapitulare şi sistematizare prin teste 84

2. Reguli de calcul cu radicali 84
3. Operații cu numere reale 89

Test de autoevaluare 95

4. Raționalizarea numitorului unei fracții 97
5. Formule de calcul prescurtat 105

6. Media geometrică a două numere reale nenegative 109
7. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană 111
Recapitulare și sistematizare prin teste 112
Test de autoevaluare 115

GEOMETRIE

Capitolul I. Patrulatere
1. Patrulatere convexe 117
2. Paralelogramul 119
Test de autoevaluare 123
3. Dreptunghiul 125
Test de autoevaluare 127
4. Rombul 129
Test de autoevaluare 131
5. Pătratul 133
Test de autoevaluare 135
Recapitulare și sistematizare prin teste 137
6. Centrul de simetrie și axe de simetrie pentru poligoanele studiate 138
7. Trapezul 140
Test de autoevaluare 143
8. Aria triunghiului și aria patrulaterului 145
Test de autoevaluare 149
9. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană 151
Recapitulare și sistematizare prin teste 152

Capitolul II. Asemănarea triunghiurilor
1. Raportul a două segmente. Teorema lui Thales 153
Test de autoevaluare 159
2. Linia mijlocie în triunghi 161
3. Linia mijlocie în trapez 163
4. Teorema fundamentală a asemănării. Criterii de asemănare a două triunghiuri 165
Test de autoevaluare 169
5. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană 174
Recapitulare și sistematizare prin teste 175

Capitolul III. Relații metrice în triunghiul dreptunghic
1. Teorema înălțimii 177
2. Teorema catetei 180
Test de autoevaluare 183
Recapitulare și sistematizare prin teste 185

Modele de teste pentru evaluarea finală 187

Modele de teze semestriale 189

Probleme pentru pregătirea olimpiadei și a concursurilor școlare 191

Indicații și răspunsuri 193

Capitolul I
Numere raționale

PP Competențe specifice

- C_1. Identificarea caracteristicilor numerelor raţionale şi a formelor de scriere a acestora în contexte variate
- C_2. Aplicarea regulilor de calcul cu numere raţionale, a estimărilor şi a aproximărilor pentru rezolvarea unor ecuaţii
- C_3. Utilizarea proprietăţilor operaţiilor în efectuarea calculelor cu numere raţionale
- C_4. Caracterizarea mulţimilor de numere şi a relaţiilor dintre acestea, utilizând limbajul logicii matematice şi teoria mulţimilor
- C_5. Determinarea regulilor eficiente de calcul în efectuarea operaţiilor cu numere raţionale
- C_6. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea operaţiilor cu numere raţionale şi a ordinii efectuării operaţiilor

PE-PP 1. Mulţimea numerelor raţionale ($\mathbb{Q}$). Reprezentarea pe axă a numerelor raţionale, opusul unui număr raţional. Incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

- Un **număr rațional** se poate exprima fie printr-un cât neefectuat, $m : n$, fie printr-o fracție ordinară, $\frac{m}{n}$, fie printr-o fracție zecimală finită sau periodică (câtul efectuat al numerelor întregi m şi n, $n \neq 0$).
- **Mulțimea numerelor raționale** se notează cu $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid \text{există } a \in \mathbb{Z} \text{ şi } b \in \mathbb{Z}^* \text{ astfel încât } x = \frac{a}{b}\right\}.$$

- **Mulțimea numerelor raționale pozitive** se notează cu $\mathbb{Q}_+$.

$$\mathbb{Q}_+ = \left\{x \mid \text{există } m \in \mathbb{N}^* \text{ şi } n \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } x = \frac{m}{n}\right\}.$$

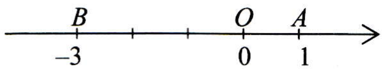
- **Mulțimea numerelor raționale negative** se notează cu $\mathbb{Q}_-$.

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_+$$

- Dacă $a \in \mathbb{Z}$, atunci $\dfrac{a}{1} = a$. Deci $a \in \mathbb{Q}$, atunci $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

  Deoarece $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ şi $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, avem că $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

- Numim **axa numerelor** o dreaptă pe care fixăm un punct, numit **origine**, o unitate de măsură şi un sens pozitiv, indicat de săgeată.



- **Fiecărui număr** rațional îi corespunde un **unic punct** pe axa numerelor.
- Două numere raționale sunt **opuse** dacă ele sunt coordonatele a două puncte de pe axă, simetrice față de O, originea axei. Opusul lui 0 este 0.

Formulele de transformare a fracțiilor zecimale în fracții ordinare:

a) transformarea fracțiilor **zecimale** în fracții **ordinare**:

$$\overline{a_0,a_1a_2...a_n} = a_0\frac{\overline{a_1a_2...a_n}}{10^n} = \frac{\overline{a_0a_1a_2...a_n}}{10^n}.$$

Exemple: $2{,}54 = 2\dfrac{54}{100} = \dfrac{254}{100}$; $0{,}6 = \dfrac{6}{10}$; $1{,}432 = 1\dfrac{432}{1000} = \dfrac{1432}{1000}$.

b) transformarea fracțiilor zecimale **periodice simple** în fracții **ordinare**:

$$\overline{a_0,(a_1a_2...a_q)} = a_0\frac{\overline{a_1a_2...a_q}}{\underbrace{999...9}_{q\text{ cifre}}}.$$

Exemple: $0{,}(6) = \dfrac{6}{9}$; $1{,}(24) = 1\dfrac{24}{99}$; $3{,}(459) = 3\dfrac{459}{999}$.

c) transformarea fracțiilor zecimale **periodice mixte** în fracții **ordinare**:

$$a_0,a_1a_2a_3...a_p(b_1b_2b_3...b_q) = a_0\frac{\overline{a_1a_2a_3...a_pb_1b_2b_3...b_q} - \overline{a_1a_2a_3...a_p}}{\underbrace{999...9}_{q\text{ cifre}}\underbrace{000...0}_{p\text{ cifre}}}.$$

Exemple: $0{,}08(3) = \dfrac{83-8}{900} = \dfrac{75}{900}$; $1{,}4(12) = 1\dfrac{412-4}{990} = 1\dfrac{408}{990}$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $-6 \in \mathbb{Q}$; b) $-0{,}762 \in \mathbb{Q}$; c) $-0{,}84 \notin \mathbb{Q}$; d) $0 \in \mathbb{Q}$;

e) $-3{,}(2) \in \mathbb{Q}$; f) $+150 \notin \mathbb{Q}$; g) $-3{,}8(4) \in \mathbb{Q}$; h) $-\dfrac{3}{8} \in \mathbb{Q}$.

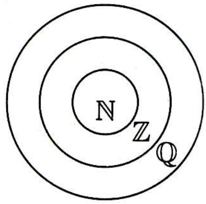
2. Fie mulțimea:

$$A=\left\{-\frac{3}{8};\ \frac{1}{6};\ -\frac{4}{9};\ -0,8;\ 0,(6);\ -9;\ \frac{1}{0,(3)};\ \frac{1}{0,125};\ -\frac{14}{7};\ \frac{18}{3};\ (-2)^2\right\}.$$

Calculați: a) $A \cap \mathbb{N}$; b) $A \cap \mathbb{Z}$; c) $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$.

3. Fie mulțimea:

$$A=\left\{-3;\ -4;\ -\frac{1}{8};\ 0,(12);\ -\frac{15}{3};\ 0;\ -0,08(3);\ \frac{1}{0,25};\ -\frac{1}{\frac{1}{8}};\ \frac{1}{0,1(6)}\right\}.$$



Copiați diagrama din dreapta și reprezentați pe ea elementele mulțimii A.

4. Fie mulțimea:

$$M=\left\{-8,\ \frac{3}{4},5,\ -4,\ \frac{9}{2},\ \frac{10}{3},\ -\frac{3}{4},\ 11,\ \frac{8}{3},\ -\frac{4}{11},\ \frac{4}{11},\ -1,\ \frac{21}{3},\ -\frac{21}{3}\right\}.$$

Determinați mulțimile: $A = \{x \in M \mid x \in \mathbb{N}\}$; $B = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Z}\}$; $C = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Z}_+\}$; $D = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Z}_-\}$; $E = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Q}_-\}$; $F = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Q}_+\}$.

5. Fie mulțimile: $A = \{-2, 3, 5\}$ și $B = \{-2, 1\}$. Determinați mulțimea:

$$C=\left\{x \,\middle|\, x=\frac{a}{b}, a \in A, b \in B\right\}.$$

6. Fie $A=\left\{-\frac{1}{2};\ 5;\ -7;\ \frac{2}{9};\ -\frac{3}{8};\ -1,7;\ 1,(35);\ 0,1345;\ -5\frac{2}{6},\ -2,2(13)\right\}$.

Scrieți mulțimea $B = \{x \mid x$ este opusul lui $y, y \in A\}$.

7. Fie $A=\left\{\frac{3}{5};\frac{2}{3};\frac{5}{4};\frac{21}{14};\frac{7}{18};\frac{3}{20};\frac{13}{22}\right\}$. Determinați mulțimile:

$B = \{x \mid x \in A, x$ este reprezentat în scriere zecimală prin fracție zecimală finită$\}$;
$C = \{y \mid y \in A, y$ este reprezentat în scriere zecimală prin fracție periodică simplă$\}$;
$D = \{z \mid z \in A, z$ este reprezentat în scriere zecimală prin fracție periodică mixtă$\}$.

8. Reprezentați următoarele numere raționale sub formă de fracție zecimală:

a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{19}{15}$; c) $\frac{35}{44}$; d) $\frac{308}{75}$; e) $\frac{91}{12}$; f) $\frac{683}{60}$;
g) $\frac{102}{55}$; h) $\frac{55}{24}$; i) $\frac{104}{35}$; j) $\frac{17}{14}$; k) $\frac{169}{11}$; l) $\frac{73}{18}$.

9. Reprezentați sub formă de fracție ordinară fiecare dintre numerele următoare:
a) 0,24; b) 2,8; c) 24,192; d) 31,48; e) 52,012;
f) 192,8; g) 4,204; h) 0,0024; i) 0,002004; j) 3,576.

10. Reprezentați sub formă de fracție ordinară fiecare dintre următoarele numere:
a) 0,(6); b) 10,(8); c) 3,(24); d) 72,(603); e) 54,(81);
f) 12,(7); g) 0,(09); h) 0,(0036); i) 4,(72); j) 2,(432).

11. Reprezentați sub formă de fracție ordinară fiecare dintre următoarele numere:
a) 0,0(6); b) 2,3(21); c) 4,1(24); d) 1,16(8);
e) 32,8(204); f) 3,2(36); g) 1,28(568); h) 3,45(495).

PE Aplicare și exersare **

12. Având în vedere descompunerea în factori primi a numitorului, stabiliți în ce tip de fracție zecimală (finită, periodică simplă sau mixtă) se transformă următoarele fracții ireductibile:

a) $\frac{16}{9}$; b) $\frac{25}{8}$; c) $\frac{17}{78}$; d) $\frac{25}{36}$; e) $\frac{28}{45}$; f) $\frac{27}{14}$; g) $\frac{64}{125}$;
h) $\frac{8}{15}$; i) $\frac{16}{65}$; j) $\frac{5}{24}$; k) $\frac{25}{426}$; l) $\frac{16}{81}$; m) $\frac{32}{625}$; n) $\frac{25}{108}$.

13. Având în vedere descompunerea în factori primi a numitorului, stabiliți în ce tip de fracție zecimală (finită, periodică simplă sau mixtă) se transformă următoarele fracții ireductibile:

a) $\frac{8}{49}$; b) $\frac{169}{32}$; c) $\frac{13}{66}$; d) $\frac{5}{98}$; e) $\frac{14}{45}$; f) $\frac{435}{14}$;
g) $\frac{2}{125}$; h) $\frac{7}{85}$; i) $\frac{4}{261}$; j) $\frac{1001}{606}$; k) $\frac{8}{625}$; l) $\frac{25}{54}$.

14. Determinați valorile întregi ale lui n pentru care relațiile de mai jos reprezintă propoziții adevărate:

a) $\frac{6}{n} \in \mathbb{N}$; b) $\frac{18}{n+2} \in \mathbb{N}$; c) $\frac{21}{3n+1} \in \mathbb{N}$; d) $\frac{12}{2n+1} \in \mathbb{Z}$;
e) $\frac{17}{2n-1} \in \mathbb{Z}$; f) $\frac{9n+16}{3n+2} \in \mathbb{Z}$; g) $\frac{7n-3}{2n+1} \in \mathbb{Z}$; h) $\frac{13n-9}{5n+7} \in \mathbb{Z}$.

15. Dați două exemple de numere naturale n pentru care fracția $\frac{12}{n+2}$ este:

a) supraunitară; b) ireductibilă; c) subunitară;
d) zecimală finită; e) periodică simplă; f) periodică mixtă.

16. Se consideră numerele $a = 12{,}128$; $b = 32{,}(85)$ și $c = 4{,}1(189)$.

a) Determinați a treia cifră după virgulă a fiecărui număr scris mai sus.
b) Determinați a 35-a cifră după virgulă a fiecărui număr scris mai sus.
c) Determinați suma primelor 125 de zecimale ale fiecărui număr scris mai sus.

17. Determinați a 72-a și a 95-a cifră după virgulă a numărului $5{,}24351(9654)$.

PE Aprofundare și performanță ***

18. a) Determinați cifra x, știind că $\overline{0,x(24)} = \frac{37}{165}$.

b) Determinați cifrele x și y pentru care are loc egalitatea: $\overline{3,(4xy1)} = \frac{352}{101}$.

c) Determinați cifrele x, y, z pentru care are loc egalitatea: $\overline{0,x4(y6z)} = \frac{447}{1850}$.

19. Arătați că următoarele fracții sunt ireductibile, pentru orice $n \in \mathbb{N}$:

a) $\frac{3n+8}{5n+13}$; b) $\frac{4n+5}{7n+9}$; c) $\frac{4n-5}{6n-7}$; d) $\frac{4n+7}{9n+16}$.

20. a) Arătați că fracția $\frac{2n+3}{5n+4}$ este reductibilă și determinați forma generală a lui n pentru care fracția este reductibilă.

b) Calculați suma celor mai mici 100 de numere naturale nenule n pentru care fracția de mai sus este reductibilă.

21. Arătați că următoarele perechi de numere naturale nenule a și b sunt prime între ele, pentru orice $n \in \mathbb{N}$:

a) $\begin{matrix} a = 3n+8 \\ b = 2n+5 \end{matrix}$; b) $\begin{matrix} a = 4n+5 \\ b = 5n+6 \end{matrix}$; c) $\begin{matrix} a = 7n+12 \\ b = 3n+5 \end{matrix}$; d) $\begin{matrix} a = 5n+7 \\ b = 7n+10 \end{matrix}$.

PE-PP **Supermate** ****

22. Determinați cifrele a, b, c astfel încât $a + c = 5b$ și are loc egalitatea:

$$\overline{a,b(c)} + \overline{b,c(a)} + \overline{c,a(b)} = 13,(3).$$

23. Calculați suma $S = \overline{0,a(bc)} + \overline{0,b(ca)} + \overline{0,c(ab)}$, știind că media aritmetică a numerelor a, b și c este egală cu 6.

24. Aflați cifrele x și y din egalitatea $\overline{0,x(y1)} + \overline{0,x(y8)} = 0,7(10)$.

25. Determinați card A, unde $A = \left\{ \overline{abc} \,\middle|\, \overline{0,a} + \overline{0,(b)} + \overline{c,a(b)} = 3\frac{2}{45} \right\}$.

26. Trei numere naturale a, b, c se numesc pseudopitagoreice dacă $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$. Arătați că există o infinitate de astfel de triplete.

SGM 5/2011

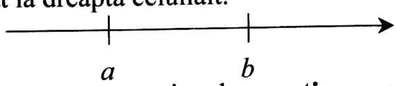
PE-PP 2. Valoarea absolută a unui număr rațional (modulul). Ordonarea numerelor raționale

- Pentru orice **număr rațional** x, **modulul sau valoarea absolută** a lui x, notată $|x|$, este egală cu:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{pentru } x \text{ pozitiv} \\ 0, & \text{pentru } x = 0 \\ -x, & \text{pentru } x \text{ negativ.} \end{cases}$$

Exemple: $\left|+\frac{17}{24}\right| = \frac{17}{24}$; $\left|-\frac{5}{32}\right| = -\left(-\frac{5}{32}\right) = \frac{5}{32}$; $|0| = 0$.

- Dintre două numere raționale diferite, **mai mare** este cel care, pe o axă a numerelor, este reprezentat la dreapta celuilalt.



$b > a$ sau $a < b$

- Dintre două numere raționale **negative**, **mai mare** este cel care are modulul mai mic.
- **Proprietățile modulului unui număr rațional:**

1. $|x| = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$;
2. $|x| \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{Q}$;
3. $|x| = |-x|$, pentru orice $x \in \mathbb{Q}$;
4. $|xy| = |x| \cdot |y|$, pentru orice $x \in \mathbb{Q}$;
5. $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}$.

- **Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real**

Partea întreagă a unui număr rațional x, notată $[x]$, este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x. Numărul $\{x\} = x - [x]$ se numește parte fracționară a numărului rațional x.

Exemple: a) $[1,62] = 1$, deoarece $1 \leq 1,62 < 2$ și $\{1,62\} = 1,62 - [1,62] = 1,62 - 1 = 0,62$.